

Axiomática, capitalismo y teoría de conjuntos

El teorema de Cantor en *Mil mesetas* (1980)

Jason Andrey Bonilla P.

Deleuze y Guattari [=D&G], en el segundo volumen de *Capitalismo y esquizofrenia*, específicamente en la meseta “7000 a.C.: Aparatos de captura”, ejecutan su célebre análisis de la axiomática capitalista. En tanto axiomática, su fundamento explícito es la teoría de conjuntos. Mi intención es mostrar una inconsistencia, o incluso una contradicción pragmática, en dos fases: (a) ellos cometen el error de afirmar que el aleph-1 [18] posee el poder del continuo y (b) el recurso al axioma del conjunto potencia resulta viciado por una ambigua fusión entre nociones de tamaño y de capacidad al pensar la guerra.

α] Deleuze y las matemáticas del (trans)infinito

Más adelante, es Cantor quien confiere a la teoría sus fórmulas matemáticas, desde una perspectiva doble, intrínseca y extrínseca. De acuerdo con el primer punto de vista, se dice que un conjunto es infinito cuando presenta una correspondencia en todos sus términos con una de sus partes o subconjuntos, siempre y cuando el conjunto y el subconjunto tengan la misma potencia o el mismo número de elementos designables como «aleph 0»; así, por ejemplo, para el conjunto de los números enteros. En función de la segunda determinación, el conjunto de los subconjuntos de un conjunto determinado es necesariamente mayor que el conjunto inicial: el conjunto de los aleph 0 subconjuntos remite, por lo tanto, a otro número transfinito, aleph 1, que posee la potencia del continuo o corresponde al conjunto de los números reales (se prosigue después con aleph 2, etc.). (D&G, *¿Qué es la filosofía?*, 120)

Aunque este trabajo examina los pasajes de la obra conjunta de D&G en los que se menciona explícitamente la *Mengenlehre*, a partir de la cita anterior nos centraremos en la influencia de la historia de las matemáticas exclusivamente en Deleuze. En este sentido, Simon Duffy (2013) tiene el mérito de haber investigado la constelación de influencias presentes en la obra deleuziana y cómo estas contribuyeron a reconfigurar problemas filosóficos específicos, como el de la individuación¹. Más recientemente, y desde una perspectiva marcadamente idiosincrática, Michael Ardoline (2024) trazó un vínculo inédito entre matemáticas y metafísica en Deleuze, articulado a través de los conceptos de *diferencia* y *necesidad*.

El punto de partida, para lo que nos interesa, es el siguiente: Deleuze no acepta el infinito en ningún sentido cuantitativo dentro de su ontología (Ardoline, 2024: 178). Esto muestra, según Ardoline, cómo los dos axiomas de la teoría de conjuntos que muestra la verdad del transfinito —el axioma del infinito y el axioma del conjunto potencia—, pueden ser entendidos como expresiones de las relaciones necesarias de la estructura modal de los

¹ En *Virtual Mathematics: The Logic of Difference*, un libro editado por el propio Duffy en el que podemos encontrar ensayos sobre la filosofía de las matemáticas de Alain Badiou, Gilles Châtelet o Manuel de Landa, también se encuentra un sugerente texto de Daniel W. Smith intitulado “Axiomatics and problematics as two modes of formalisation: Deleuze’s epistemology of mathematics”, 2006: 145-168.

objetos. Por supuesto, Deleuze rechaza una forma particular de infinito, una cuya formulación resulta más ambigua de lo que sus textos permiten esclarecer. En *¿Qué es la filosofía?* o *Diferencia y repetición*, las referencias al devenir-infinito o «velocidades infinitas» son comunes². Esto genera una controversia ligada a su afinidad con figuras que utilizan el infinito, como Spinoza y Leibniz, un tema profundamente relacionado con la polémica en torno a Cantor³. En *Diferencia y repetición*, especialmente, Deleuze trae a colación el problema que atañe a los modos y la substancia en el sistema spinozista, a saber, la distinción entre finito e infinito. Para el filósofo francés, esta distinción emerge en el nivel de la representación, pero su aplicación es pobre ante el universo: “El mundo no es ni finito ni infinito, como lo presentaría la representación: está completado y es ilimitado” (DR: 57). Esto muestra cómo el infinito deleuziano nunca es un infinito cuantitativo, el cual es requerido en las explicaciones de la noción del transfinito formalizado por la teoría de conjuntos cantoriana.

Al respecto de las modalidades que Deleuze incorpora —virtualidad y potencialidad— a las ya usuales —necesidad, contingencia, posibilidad e imposibilidad—, el infinito virtual que parece defender nunca puede devenir un infinito actual. Esto está en línea con el rechazo de D&G al uso del infinito como cantidad. Curiosamente, parece haber una reconciliación con la antinomia de lo finito y lo infinito en la metafísica deleuziana cuando en *Diferencia y repetición* el cálculo infinitesimal adquiere una particular relevancia: “Las matemáticas modernas también nos dejan en un estado de antinomia, ya que la interpretación estrictamente finita que ofrecen del cálculo presupone, sin embargo, un axioma de infinito en su fundamento teórico de conjuntos, aunque dicho axioma no encuentra ilustración alguna en el cálculo” (DR: 178).

El debate gira en torno a la cuestión de que el cálculo moderno, aunque formulado de manera finita y rigurosa, se apoya en una teoría de conjuntos que presupone el infinito, lo que deja sin resolver las tensiones originales sobre su legitimidad. La aceptabilidad del cálculo siguiendo las formulaciones de Newton y Leibniz adquiere en los siglos diecisiete y dieciocho un matiz que parece central en la tesis doctoral de Deleuze. Este asunto, solucionado por Weierstrass en la década de 1870, repercute en nuestra pesquisa, ya que para Deleuze, el verdadero problema no es el uso de infinitesimales en el cálculo, ya resuelto por Weierstrass, sino la necesidad de postular el infinito —a través del axioma del infinito en la teoría de conjuntos— para poder pensar la diferencia. Pero el cálculo depende de la teoría de conjuntos y de sus recursos transfinitos para asegurar su consistencia matemática. Esto es a todas luces un problema para Deleuze porque, aunque valora al cálculo como una forma excepcional de explicar las relaciones diferenciales, quiere evitar basar esa explicación en un infinito fundacional.

² Hay una cierta similitud entre las velocidades infinitas y los «movimientos aberrantes» de David Lapoujade. Estos, desde este uso desmesurado de la noción de infinito, se refieren a procesos que desafían la lógica clásica, especialmente el principio de identidad.

³ En el §5 de los *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* —obra cumbre de Cantor— las referencias explícitas de la filosofía moderna son: Locke, Descartes, Spinoza y Leibniz.

β] El método de diagonalización y el teorema de Cantor

La teoría de conjuntos, en su versión ingenua⁴, presupone que la *unidad* del concepto puede ser teorizada como *totalidad*. Esta aseveración, como bien sabemos, tiene consecuencias inmediatas en la naturaleza de las matemáticas, en profunda conexión con los problemas de la filosofía antigua. Una de sus implicaciones más profundas proviene de la definición de conjunto como «muchos que pueden ser pensados como uno», lo cual coincide con la teorización de Cantor de las series infinitas de los números naturales (1, 2, 3...). Con este paso, la intención es revertir 2000 años de teoría aristotélica sobre el infinito, aquella que pensaba los infinitos “potenciales” sin aceptar la existencia de «totalidades completas actuales». Cantor reveló que los conjuntos infinitos pueden considerarse como totalidades completas y definidas formalmente, separando así el concepto matemático del infinito del concepto religioso o místico que lo ve como una trascendencia incognoscible.

Como bien señala Paul Livingston, la innovación de Cantor articula la posibilidad de un pensamiento filosófico que concibe el infinito actual. Formaliza para esto la técnica de *diagonalización*, la cual juega un rol fundamental en la generación de prácticamente todas las paradojas y estructuras paradójicas. La mejor manera de comprender la diagonalización, sostiene Livingston, consiste en pensar un número infinito de elementos de un sistema: la totalidad que agota el sistema en su conjunto, o que comprende la totalidad de los elementos que poseen cierta propiedad dentro de él. La diagonalización genera un nuevo elemento que pertenece formalmente a la totalidad, pero que es distinto de todos los elementos ya incluidos en ella: “Por medio de la diagonalización, Cantor, en particular, mostró el estricto exceso del tamaño del conjunto potencia de cualquier conjunto —es decir, el conjunto de todos los posibles conjuntos que recombinan sus elementos— sobre el conjunto original mismo. Por medio de esta operación, nace la vasta jerarquía cantoriana de conjuntos «transfinitos», cada uno un infinito estrictamente mayor que el anterior” (2012: 21). En función de la axiomática estándar moderna Zermelo-Fraenkel [=ZFC], usada por D&G, tenemos lo siguiente: dado un conjunto A y una función f de A al conjunto potencia de A , se define el conjunto D como $\{x \text{ en } A : x \text{ no pertenece a } f(x)\}$. La diagonalización de Cantor demuestra que no existe ningún elemento a en A tal que $f(a)$ sea igual a D , lo que implica que no puede existir una función sobreyectiva de A al conjunto potencia $P(A)$.

El teorema de Cantor, informalmente, demuestra que no existe un número cardinal mayor ni un conjunto más grande. Según ZFC, esto puede mostrarse siguiéndose de dos axiomas: *el axioma del infinito* y *el axioma del conjunto potencia*⁵. El axioma de infinito establece la existencia de al menos un conjunto infinito, es decir, un conjunto que puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio, lo que define formalmente

⁴ Cfr. George Boolos (1971), “The Iterative Conception of Set”. *Journal of Philosophy* (68): 215-252.

⁵ Explaya Markus Gabriel: “Desde el punto de vista de Badiou, esta consiste en renunciar a la idea de que hay un total absoluto, sin restricciones, por lo menos en cuanto se requiere para ello: o bien un conjunto de todos los conjuntos (puesto en juego por Russell); o bien la aceptación de que hay exactamente un conjunto infinito de objetos (de elementos para conjuntos; contra lo que habla el teorema de Cantor). (...) Badiou introduce tanto el principio del conjunto potencia de Cantor como la antinomia de Russell a título de garante, como razón principal para su rechazo de la idea a un totalidad en el sentido de un conjunto que lo abarca todo.” (2015: 117)

un conjunto transfinito. El axioma del conjunto potencia, por su parte, garantiza que para cualquier conjunto existe un conjunto que contiene todos sus subconjuntos. A partir de este axioma, se demuestra que ningún conjunto puede ponerse en correspondencia uno a uno con su propio conjunto potencia, lo que implica que siempre existe una cardinalidad mayor: mientras el conjunto de los números naturales tiene cardinalidad $\aleph_0$, su conjunto potencia —los números reales— tiene una cardinalidad estrictamente mayor, denominada c .

Quentin Meillassoux, otro filósofo francés muy influido por la obra de Deleuze y de Badiou⁶, explica el teorema de Cantor en su primer libro *Después de la finitud* para tornar imposible el pensamiento de un infinito último que ningún otro podría superar, equivalente al Dios de la onto-teo-logía. Su explicación es muy clara: tenemos, por ejemplo, el conjunto finito A comprendido por tres elementos (1, 2, 3). El conjunto de sus partes comprende entonces (además del conjunto vacío, que forma parte de cualquier conjunto): (1), (2), (3) —es decir, las partes «mínimas» de A compuestas de un único elemento—, (1, 2), (1, 3), (2, 3) y (1, 2, 3) —siendo esta última parte, (1, 2, 3), considerada como la subparte máxima de A , idéntica a sí—. Está claro que este segundo conjunto es mayor que el primero (posee más elementos), pudiéndose demostrar que siempre será el caso, *incluso para un conjunto infinito*. Por lo tanto, es posible, para todo conjunto infinito, construir un conjunto cardinal superior a este último, a saber, el infinito que incluye todas sus partes. Pero esta construcción puede llevarse a cabo para el nuevo infinito, y así infinitamente (2015: 167).

La cancelación a priori de la totalización vuelve imposible afirmar que lo concebible sea necesariamente totalizable, en la medida en que la revolución cantoriana del conjuntismo constituyó la destotalización del número, cuyo otro nombre es el transfinito. De la axiomática estándar ZFC, podemos construir una sucesión ilimitada de conjuntos infinitos cada uno de los cuales tienen una cantidad de elementos superior a la cantidad del conjunto cuyas partes reagrupa. Tal sucesión se denomina «serie de alephs» o sucesión de números cardinales transfinitos. Para Meillassoux, siguiendo de cerca a Cantor, no hay una «cantidad de todas las cantidades», en cuanto el conjunto T (=Todo) de todas las cantidades es simplemente inexistente. En el marco de ZFC, lo cuantificable y lo pensable no conforman un todo: “Esta es la traducción que vamos a retener aquí del transfinito cantoriano: *el Todo (cuantificable) de lo pensable es impensable*” (2015: 168).

Recordemos el pasaje de *¿Qué es la filosofía?* en el que D&G sostienen que, aunque la teoría de conjuntos trata con lo transfinito, no se ocupa del infinito. Ellos parten de la definición cantoriana de conjunto infinito y del argumento que fundamenta la jerarquía de los cardinales transfinitos en el hecho de que ningún conjunto puede contar —es decir, ponerse en correspondencia biyectiva con— su propio conjunto potencia. Este aspecto será definitorio a continuación cuando examinemos la axiomática capitalista. Por lo pronto, advertimos que D&G no leen el trabajo de Cantor como una teoría sobre el infinito ni referida directamente a él —al menos no de forma principal—, sino como una formalización de la introducción de

⁶ De hecho, la mención a la axiomática ZFC en *¿Qué es la filosofía?* se da en referencia al principal trabajo de Badiou, *El ser y el acontecimiento*, el cual funda una ontología sobre la teoría de conjuntos. Nos podemos remitir a las Meditaciones 1 a 5, y, 12 a 14 y sobre todo la 26 de esta última obra mencionada.

límites en lo ilimitado, esto es, en el ápeiron deleuziano (Ardoline, 2024: 190). La relación entre el axioma del infinito y sus teoremas debe fundarse en una relación interna al objeto, donde un conjunto contiene otro de igual cardinalidad, es decir, un muchos-como-uno que incluye otro muchos-como-uno con el que puede establecer correspondencia biunívoca. El axioma de infinito y sus consecuencias en ZFC pueden expresarse porque, en todo objeto, existe una relación interna entre partes virtualmente infinitas que, aunque no estrictamente extensionales, están preservadas como una unidad por poderes que delimitan y constituyen al objeto como tal. Esta unidad permite que la relación entre infinitos potenciales se exprese como una infinitud completada, base formal del axioma en cuestión. Antes de observar la contradicción interna en esto, veamos cómo interpela una propuesta central de *Mil mesetas*, no sin antes emplear la siguiente notación:

$$\forall A \forall f (f \subseteq A \times \mathcal{P}(A) \wedge \forall x \in A \exists y \in \mathcal{P}(A) ((x, y) \in f) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{P}(A) \forall x \in A ((x, z) \notin f))$$

Es decir,

Sea $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Por el teorema de Cantor, no existe función sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$, por lo tanto $|\mathcal{P}(A)| > |A|$, lo que justifica la jerarquía de cardinales transfinitos.

γ] La axiomática capitalista y el axioma del conjunto potencia

La aporía a la que quiero llegar concierne a la axiomatización estándar de la teoría de conjuntos, pues un resumen como el planteado contradice un punto clave en D&G, tal como aparece en la decimotercera meseta. Al vincular el infinito con la velocidad y lo ilimitado, su interpretación entra en conflicto directo con ZFC, pues el concepto de apeiron no puede reconciliarse con la concepción del infinito propia de la teoría de conjuntos.

En el *Anti-Edipo*, D&G definen el capitalismo con estas palabras: “El capitalismo es la única máquina social, como veremos, que se ha construido como tal sobre flujos decodificados, sustituyendo los códigos intrínsecos por una axiomática de las cantidades abstractas en forma de moneda” (AE: 145). Para esta construcción, las jerarquías cualitativas absolutas son reemplazadas por un conjunto de mecanismos que abordan la realidad social en términos cuantitativos, denominados axiomas por los autores. En *Mil mesetas*, definen axiomática del siguiente modo: “Pues si bien es cierto que nosotros no empleamos la palabra 'axiomática' a la manera de una simple metáfora, hay que recordar lo que distingue una axiomática de todo género de códigos, sobrecodificaciones y recodificaciones: la axiomática considera directamente elementos y relaciones puramente funcionales, cuya naturaleza no está especificada y que se realizan inmediatamente en dominios muy diversos” (MM: 459). Un axioma es, por tanto, una regla indiferente a la naturaleza de aquello a lo que se aplica y al contexto de su aplicación. Inmediatamente oponen este concepto a otro tipo de reglas, a saber, los códigos, que caracterizan otras formaciones sociales: “los códigos son relativos a esos dominios, enuncian relaciones específicas entre elementos cualificados, que sólo pueden

ser reducidos a una unidad formal superior (sobrecodificación) por trascendencia e indirectamente.” (MM: 459)

Vale la pena insistir también en que, para D&G, los axiomas nunca se encuentran de forma aislada: “son enunciados principales, que no derivan o no dependen de otro” (MM: 466). La axiomática capitalista y la axiomática ZFC comparten una compatibilidad general en su enfoque estructural, con la salvedad de que el *criterio de contradicción* no tiene cabida en el conjunto de axiomas desarrollado por el capitalismo. En realidad, para D&G el sistema capitalista es sumamente flexible en sí mismo. En el inconsciente, como en la axiomática del capitalismo, la contradicción resulta irrelevante: ambos operan sin subordinación a exigencias formales ni significados determinados, o, si se prefiere, funcionan bajo el rango de una lógica paraconsistente.

Detengámonos en el sentido literal de la axiomatización. Según D&G, el Estado no desaparece con el surgimiento del capitalismo, sino que asume el rol de "modelo de realización" de la axiomática capitalista (MM: 461). Esto implica que el Estado, ya no como único soberano político, opera como un conjunto plural de aparatos regulatorios que aseguran las condiciones materiales y expresivas necesarias para el funcionamiento del capitalismo, como infraestructura, marcos legales y alianzas políticas. De esta manera, el capitalismo se realiza a través del Estado. Para complementar este relato, D&G presentan una tipología tripartita de los Estados como modelos de realización de la axiomática capitalista. Proponen que los Estados pueden diferenciarse según: 1) la cantidad de axiomas que implementan, 2) las relaciones de producción en el sentido marxista, y 3) las formas en que cooptan sistemas económicos periféricos para realizar los axiomas en juego. Estos tres ejes permiten construir un espacio de fases del capitalismo global donde se puede ubicar cada aparato estatal concreto. De eso se sigue que: “El capitalismo es claramente una axiomática, puesto que sus únicas leyes son inmanentes” (MM: 467).

Podemos apreciar que D&G desarrollan el concepto de axioma a partir del clásico libro *La axiomática* de Robert Blanché (1955). El texto de Blanché aborda el método axiomático en su desarrollo histórico, desde Euclides hasta la lógica matemática posterior a Gödel, así como su impacto en la ciencia y la filosofía. Blanché examina los límites del método, especialmente en relación con los compromisos intuitivos irreducibles y las paradojas que muestran la relatividad inevitable de los sistemas axiomáticos. Sin embargo, su principal argumento es que el método axiomático permite una aproximación regulada entre *lo formal* y *lo empírico*, superando la distinción tradicional entre la ciencia racional y ciencia experimental y formalizando los elementos *a posteriori* de una ciencia *a priori*. En su caso particular, D&G citan las partes del texto de Blanché que abordan problemáticas centrales del método axiomático, especialmente las que surgen en la axiomatización de la teoría de conjuntos. Estas problemáticas ocupan una lista numerada que cierra el argumento del "Aparato de Captura" y forma una parte indispensable de su análisis del capitalismo: (a) adjunción, sustracción; (b) saturación; (c) modelos, isomorfía; (d) la potencia; (e) tercero incluido; (f) minorías; (g) proposiciones indecibles.

Recordemos que D&G afirman que el capitalismo y la política actual son una axiomática en sentido literal. Su uso de la axiomática no es metafórico, y su valor se encuentra en la relación entre el Estado y el capitalismo. Al tratar las problemáticas del método axiomático, revelan su carácter político: afirman que la relación axioma/modelo en la teoría de conjuntos es la manera en que podemos entender la relación axioma/Estado. De la lista anterior, solamente podemos tratar por encima la potencia, vinculada con el uso del axioma del conjunto potencia. Y agregamos una última definición estándar de la teoría de conjuntos: el *continuum*. La hipótesis del continuo es un problema sin resolver en la teoría de conjuntos: Kurt Gödel y Paul Cohen demostraron que esta hipótesis es independiente de la axiomática estándar, lo que significa que no se puede probar ni refutar a partir de los axiomas de ZFC. Cantor, quien dedicó la última parte de su vida a intentar probarla, fracasando cada vez, formuló la hipótesis, que sostiene que no existe un conjunto cuya cardinalidad se encuentre entre la de $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

Dicen D&G: “Supongamos que la axiomática libera necesariamente una potencia superior a aquella que trata, es decir, a la de los conjuntos que le sirven de modelos. Algo así como una potencia del continuo, ligada a la axiomática, y que sin embargo la desborda” (MM: 470). Aquí es donde la brecha entre las matemáticas y su análisis político se dilata, revelando una comprensión matemática del problema que resulta empobrecida o incluso errónea. Para la teoría de conjuntos, el poder se refiere al tamaño, no a la capacidad; así, $\aleph_0$ tiene el mismo poder que $\aleph_1$ o $\aleph_2$, pero es menor en poder que $\aleph_\omega$. En el axioma del conjunto potencia, el término "poder" también se entiende en este sentido, ya que el conjunto potencia siempre es mayor en tamaño que el conjunto del cual se deriva. En D&G destaca cómo su extrapolación tiende a mezclar las nociones de tamaño y capacidad, especialmente en un análisis sobresaliente sobre la guerra que contiene los puntos clave en discusión, considerando la potencia del *continuum*: “Un «umbral» continuo de la potencia acompaña siempre el desplazamiento de los «límites» de la axiomática; como si la potencia de guerra sobresaturase siempre la saturación del sistema y la condicionase” (MM: 470).

Desde que podemos inferir que el uso de la hipótesis del continuo es premeditado, no hay excusa para emplearlo mal. Más aún, en teoría de conjuntos, el poder se refiere al tamaño, pero D&G parece aludir a la capacidad, lo que dificulta vincular esta noción estática y cuantitativa con conceptos como la destrucción o la guerra, por radical que sea su definición. Y ni hablar de que, en principio, era un “infinito cuantitativo” lo que se evitaba. Por los motivos expuestos, podemos asegurar que D&G presentan errores en su uso del método axiomático y lo aplican de forma inconsistente: la hipótesis del continuo excede la axiomatización de ZFC, al menos tal como está sin la adición de axiomas adicionales, además de que el conjunto-potencia parece esterilizado cuando su verdadero uso es impedir la totalización.